

KOMMUNIKATIIVISET TYÖTAVAT MATEMATIIKAN OPETUKSESSA: MATEMATIIKAN KIELENTÄMINEN



$$3+1=4$$

$$4-3=1$$

$$1+3=4$$

$$4-1=3$$



$$2+2=4$$

$$4-2=2$$


Jorma Joutsenlahti

Tampereen yliopiston opettajankoulutuslaitos, Hämeenlinna


Kommunikaatio

- ▣ Latinan *communicare* "tehdä yleiseksi", "jakaa"
- ▣ Käsitteiden merkitysten rakentaminen ei ole luokassa kunkin oppilaan yksityinen oma prosessi, vaan luokan yhteinen prosessi. Kommunikoinnin avulla tietoa ei siirretä vaan rakennetaan yhdessä. (Sfard 2000, 2001)





Miksi kielen monipuolinen
käyttö on tärkeää myös
matematiikassa?



**Miltä näyttää tyypillinen
matematiikan kouluviikko?**

K3
S. 159

$$\begin{array}{r}
 2468 + 3456 + 3860 \\
 111 \\
 2468 \\
 + 3456 \\
 3860 \\
 \hline
 9784
 \end{array}$$

Tugas: 9784

K4
S. 159

$$\begin{array}{r}
 6868 - 4978 + 3878 \\
 1716 \\
 6868 \\
 - 4978 \\
 \hline
 1890
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 11 \\
 1890 \\
 + 3878 \\
 \hline
 5768
 \end{array}$$

K3
S. 59

$$2468 + 3456 + 3860$$

$$\begin{array}{r}
 111 \\
 2468 \\
 + 3456 \\
 3860 \\
 \hline
 9784
 \end{array}$$

Tulas: 9784

K4
S. 59

$$6868 - 4978 + 3878$$

$$\begin{array}{r}
 1716 \\
 6868 \\
 - 4978 \\
 \hline
 1890
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 11 \\
 1890 \\
 + 3878 \\
 \hline
 5768
 \end{array}$$

Perusopetuksen matematiikan ops:n perusteet 2004 (Ik 1-2)

Opetuksen ydintehtäviä mm.:

- ▣ *matemaattisen ajattelun kehittäminen*

Tavoitteita:

- ▣ *Käsitteiden muodostusprosessissa keskeisiä ovat **puhuttu ja kirjoitettu kieli***
- ▣ *Oppilas oppii **perustelemaan** ratkaisujaan ja päätelmiään konkreettisin mallein ja välinein, kuvin, **kirjallisesti tai suullisesti***

Perusopetuksen matematiikan ops:n perusteet 2004 (Ik 3-5)

Opetuksen ydintehtäviä mm.

- ▣ *matemaattisen ajattelun kehittämisen...*

Tavoitteita:

- ▣ *Oppilas oppii **perustelevaan** toimintaansa ja päätelmiään sekä **esittämään** ratkaisujaan muille*

Mitä on matemaattinen
ajattelu?

Tiedon
prosessoinnin
näkökulma

**Psykometrinen
näkökulma**

**Antropologinen
näkökulma**

**Matemaattinen
ajattelu**

**Matematiikan
näkökulma**

**Pedagoginen
näkökulma**

Kieli

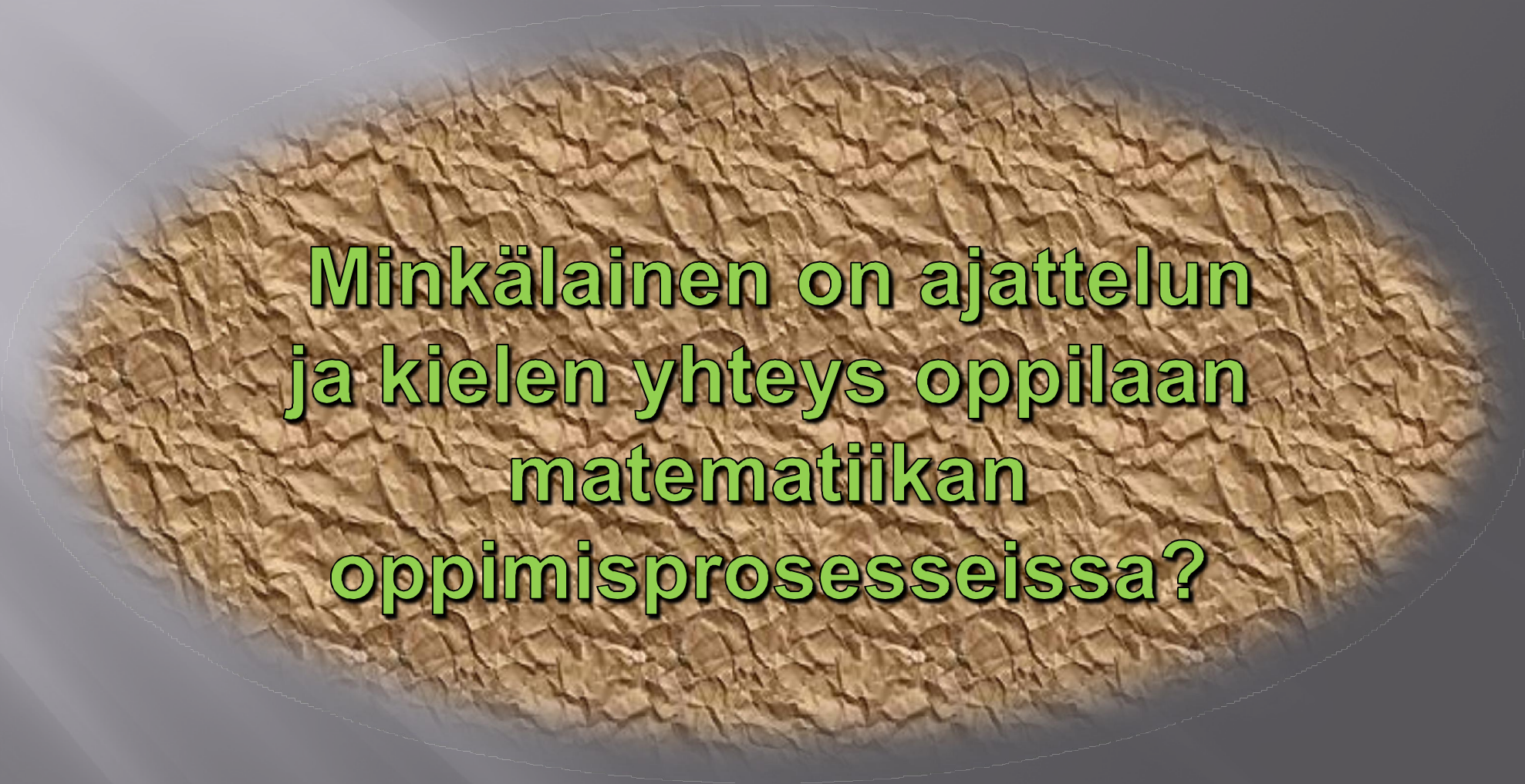
Kielen avulla mm. (Orpana 1992)

- ▣ jäsennetään todellisuutta
- ▣ välitetään jäsennettyä tietoa muille
- ▣ tutkitaan ympäristöä
- ▣ otetaan asioista selvää
- ▣ vaikutetaan muihin

Kieli

Kieli sisältää puhutun ja kirjoitetun kielen lisäksi kuvat, ilmeet, eleet sekä mm. matematiikan symbolikielen.

Kieli on mukana kognitiivisissa kehitysprosesseissa. Kieltä ja ajattelua ei voi erottaa toisistaan kouluikäisillä.
(Vygotski)



**Minkälainen on ajattelun
ja kielen yhteys oppilaan
matematiikan
oppimisprosessissa?**

symbolisoi

Käsitteen sisältö

- assosiaatiot, uskomukset
- mielipiteet
- aikaisemmat tiedot
- havainnot



viittaa

Käsitteen ilmaisu

- puhuttu tai kirjoitettu sana
- symbolit (mm. mat. kieli)
- piirroksset, eleet tms.

esittää

Ulkoinen tarkoite

- toimintamateriaali
- esine, asia, ilmiö
- ominaisuus tms.

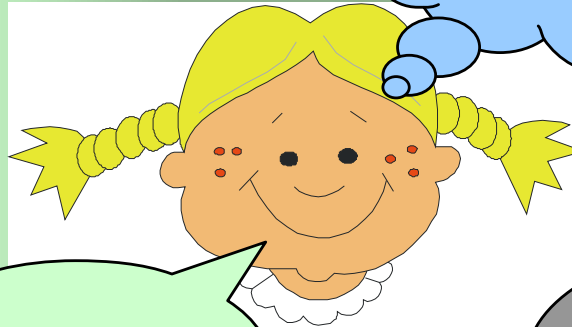


Muut oppilaat
arvioivat ja
reflektioivat
oppilastoverin
ilmaisua ja
samalla rakentavat
itse käsitteen
sisältöä



Opettaja

- sallii oppilaan ilmaista käsitteen oppilaan omalla tavalla
- arvioi sisältöä
- ohjaa keskustelun ja opetusjärjestelyjen avulla sisällön muovautumista



Käsitteen ilmaisu

Käsitteen sisältö

- Oppilas
- muokkaa sisältöä kokemusmaailmansa kautta
- ilmaistessa sisältöä reflektoi myös itse ajatteluun

Ulkoinen tarkoite



Opettaja

suunnittelee
tarkoituksenmukaiset
opetusjärjestelyt
(oppimateriaalit yms.)

JoJo2008

Matematiikan kielentämisessä oppilaita ohjataan

I. Jäsentämään ja
perustelemaan
vastauksiaan sekä
esittämään ratkaisujaan
muille ("omin sanoin"
puhumalla, kirjoittamalla
etc.)

☐ Tällöin oppilas samalla
jäsentää itselleen omaa
ajatteluaan ja tekee sen
näkyväksi muille





Matematiikan kielentämisessä oppilaita ohjataan



- soveltavissa tehtävissä kirjoittamaan vihkoonsa oman ratkaisun kulkua kuvaavia ja perustelevia lauseita (väliotsikoita jne.) sekä selventäviä kuvioita
- Oppilaan konseptuaalinen tieto vahvistuu
- opettaja , muut oppilaat ja esim. Valtakunnallisen kokeen tarkastajat voivat seurata ratkaisijan ajattelua

Lasken ensin ostokset
yhteensä:

Lippikset maksoivat
yhteensä

$$3 \cdot 12 \text{€} = 36 \text{€}$$

Sukat maksoivat yh-
teensä

$$3 \cdot 5 \text{€} = 15 \text{€}$$

Lippikset ja sukat ja
solmio maksoivat
yhteensä

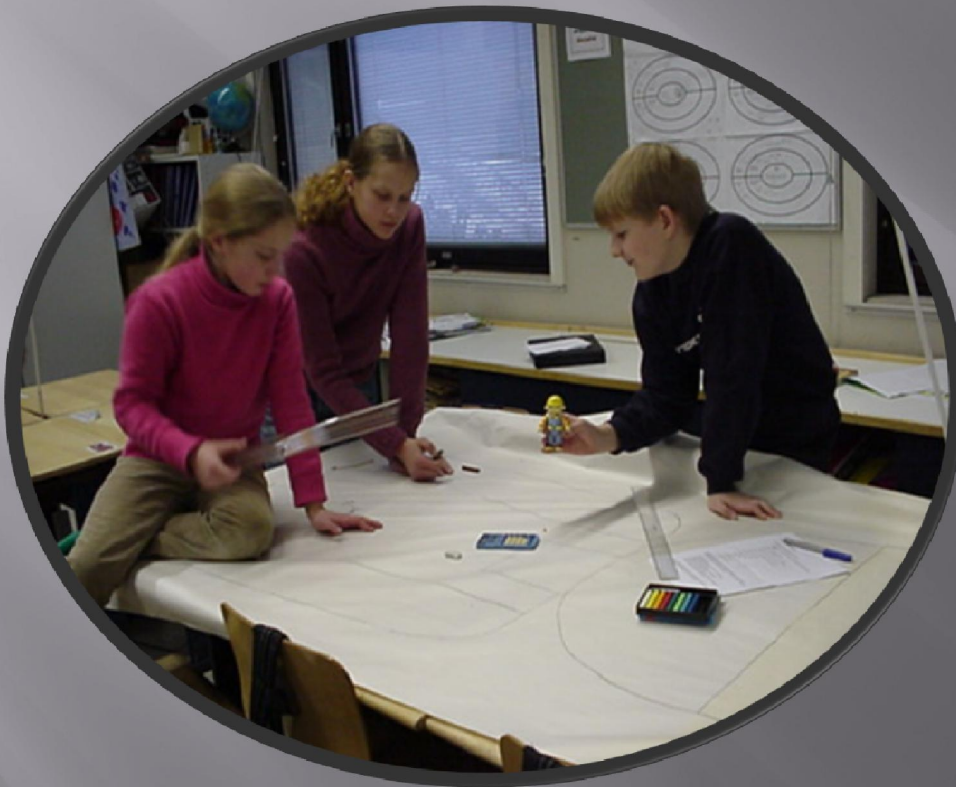
$$\begin{array}{r} 36 \\ + 51 \\ \hline 87 \end{array}$$

Vähennä ostosten yh-
summana 100 eurosta
joten isä saa takaisin

$$\begin{array}{r} 100 \\ - 67 \\ \hline 33 \end{array}$$

Tulos isä saa takaisin 33€

Matematiikan kielentämisessä oppilaita ohjataan



- ▣ keskustelemaan toisten oppilaiden ideoista, ratkaisuista jne.
- ▣ sosiaalinen interaktio, yhteistoiminnallisuus





Vihkotyöskenntely



Tuhattaituri 6

(Asikainen, Fälden, Nyrhinen, Rokka,
Vehmas: Otava 2006, s.16)

5. Sanallisia tehtäviä

Luokan kassassa on 400 euroa. Opettaja ostaa 27 junalippua. Yksi lippu maksaa 12 euroa. Kuinka paljon rahaa jää?

$$400 \text{ €} - 27 \cdot 12 \text{ €}$$

		2	7	
		·	1	2
		54		
+	2	7		
	3	2	4	

		4	0	0
		3	2	4
		76		

Tulos: 76 €

Sanallisten tehtävien ratkaiseminen

- Lue tehtävä.
- Mitä tehtävässä kysytään?
- Mitä laskutoimituksia tarvitaan?
- Muodosta lauseke ja laske. Muista yksiköt.
- Mieti, onko tuloksesi järkevä.
- Kirjoita tulos. Muista merkitä yksikkö.

K3
S. 159

$$\begin{array}{r}
 2468 + 3456 + 3860 \\
 111 \\
 2468 \\
 + 3456 \\
 3860 \\
 \hline
 9784
 \end{array}$$

Tulas: 9784

K4
S. 159

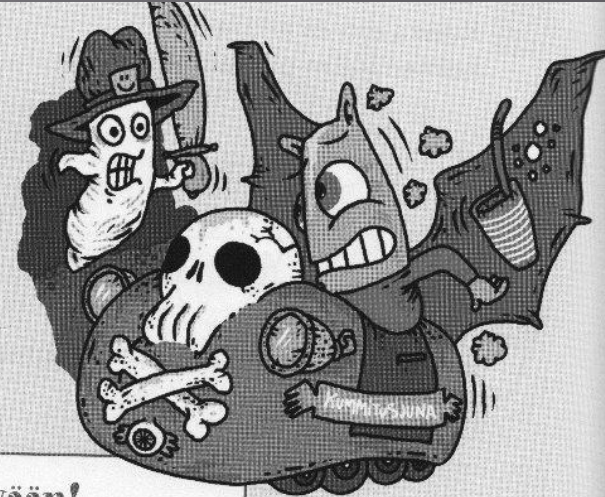
$$\begin{array}{r}
 6868 - 4978 + 3878 \\
 1716 \\
 6868 \\
 - 4978 \\
 \hline
 1890
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 11 \\
 1890 \\
 + 3878 \\
 \hline
 5768
 \end{array}$$

Matikkamatka 5

(Hänninen, Laine, Putkonen, Sinnemäki 2006, Tammi. s.58)



Nyt harjoitellaan
pareittain sanallisten
tehtävien ratkaisemista.



Tutustu tehtävään!

- Lue tehtävä huolellisesti.
- Selosta tehtävä omin sanoin parille.
- Piirtäminen voi auttaa ymmärtämään tehtävän.

Ratkaise tehtävä!

- Katso, mitä kysytään.
- Mieti, mitä laskutoimituksia tarvitaan.
- Kirjoita lasku ja laske.

Pohdi vastaustasi!

- Vastasitko kysymykseen?
- Muistitko mittayksiköt?
- Onko vastauksesi järkevä?



Pitkä matematiikka Funktiot ja Yhtälöt 2

(Kangasaho, Mäkinen, Oikkonen, Paasonen, Salmela 2000, WSOY, S.66)

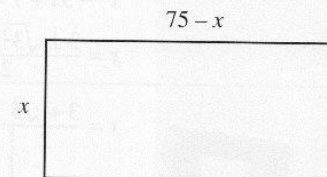
66 Funktiot ja yhtälöt 2

ESIMERKKI 2

Köydellä, jonka pituus on 150 m, on rajattava suorakulmion muotoinen alue. Alueen pinta-alan halutaan olevan 1 400 m². Mitkä ovat alueen mitat?

Ratkaisu

Suorakulmion piiri on 150 m. Pituisuuden ja leveyden summa on puolet piiristä eli 75 m. Jos toinen näistä on x (m), niin toinen on $75 - x$.



$$x(75 - x) = 1400$$

$$75x - x^2 = 1400$$

$$75x - x^2 - 1400 = 0$$

$$-x^2 + 75x - 1400 = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$x^2 - 75x + 1400 = 0$$

$$x = \frac{75 \pm \sqrt{75^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1400}}{2 \cdot 1} = \frac{75 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{75 \pm 5}{2}$$

$$x = \frac{75 + 5}{2} = 40 \quad \text{tai} \quad x = \frac{75 - 5}{2} = 35$$

Molemmat juuret kelpaavat aitauksen sivun pituudeksi.

Jos sivu x on 40 (m), niin toinen sivu on $75 - 40 = 35$ (m).

Jos sivu x on 35 (m), niin toinen sivu on $75 - 35 = 40$ (m).

Molemmat juuret johtavat samoihin suorakulmion mittoihin. Vaikka yhtälöllä oli kaksi juurta, niin ongelmalla on vain yksi ratkaisu.

Vastaus

Alueen sivut ovat 40 m ja 35 m.



Lukiolaisen ratkaisu (Tervakosken lukio 3.vsk, lyhyt matematiikka 2008)

tehtävä 175 s.101

$$f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 504x + 3$$



derivoidaan funktio:

$$f'(x) = 12x^2 - 12x - 504$$



lasketaan derivaatan nollakohdat:

$$12x^2 - 12x - 504 = 0$$

käytetään II asteen yhtälön ratkaisukaavaa:

$$\left. \begin{matrix} a = 12 \\ b = (-12) \\ c = (-504) \end{matrix} \right\} x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 12 \cdot (-504)}}{2 \cdot 12}$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{24336}}{24} = \frac{12 \pm 156}{24}$$

$$\Rightarrow x = \frac{12 + 156}{24} = \frac{168}{24} = 7$$

tai

$$x = \frac{12 - 156}{24} = \frac{-144}{24} = -6$$

Piirretään merkki- ja kulkukoavio

	-6	7	
f'	+	-	+
f	↗	↘	↗
	kasv.	väh.	kasv.

Vast: kasvava, kun $x \leq -6$ tai $x \geq 7$
vähenevä, kun $-6 \leq x \leq 7$



"Perinteinen"-malli

5. Sanallisia tehtäviä

Luokan kassassa on 400 euroa. Opettaja ostaa 27 junalippua. Yksi lippu maksaa 12 euroa. Kuinka paljon rahaa jää?

$400 \text{ €} - 27 \cdot 12 \text{ €}$

		27				400
		· 12				- 324
		54	x			76
		+ 27				
		324				

Tulos: 76 €

Matematiikan kieli

(Tuhattaituri 6, s.16)



"Kertomus"-malli

Junaliput maksavat yhteensä:

$$27 \cdot 12 \text{ €} = 324 \text{ €}$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ \cdot 12 \\ \hline 54 \\ 270 \\ \hline 324 \end{array} +$$

Rahaa jää kassaan:

$$400 \text{ €} - 324 \text{ €} = 76 \text{ €}$$

Lausekkeena:

$$400 \text{ €} - 27 \cdot 12 \text{ €} = 76 \text{ €}$$

V: Rahaa jää 76 €.

Luonnollinen kieli

Matematiikan kieli

Luonnollinen kieli

Matematiikan kieli

Luonnollinen kieli

Matematiikan kieli

Luonnollinen kieli

Matematiikan kieli

Luonnollinen kieli

”Kertomus”-malli

- .. ”Kertomus” -malli: ratkaisun kulku esitellään vaihe vaiheelta suoraviivaisesti edeten alkutilanteesta loppupäätelmiin.
- .. Ratkaisun eteneminen tai ”punainen lanka” selvitetään sanallisesti (lyhyin väliotsikoin tai kokonaisin lausein) ja / tai kuvin. Ainakin seuraavat näkökulmat huomioidaan ratkaisua kuvattaessa:
 - i **MITÄ SEURAAVAKSI** olet tekemässä matematiikan kielellä (huomioiden tehtävän kontekstin). Esim. ”Ratkaisun tilavuuden”: , ”Tilavuus:”, ”Funktion ääriarvot:” , ”Alueen pinta-ala:”
 - i **MILLÄ PERUSTEELLA** teet seuraavaksi jotain tai tehtävä etenee. Ratkaisustrategian kuvaaminen.: Esim. ” Koska funktio on polynomifunktiona kaikkialla jatkuva ja sillä on vain yksi nollakohta, niin ...”, ” Koska vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, niin niiden pistetulo on nolla:” , ”
 - i **MERKINNÄT**; mitä valitsemasi merkinnät tarkoittavat: Esim: ” x = prosenttikerroin”, ” a = tuotteen hinta alussa (€)”
 - i **JOHTOPÄÄTÖKSET ja/tai VASTAUS kokonaisena virkkeenä.** (Opiskelija 1) arvioi vastauksen mielekkyyttä, 2) yksiköt tulevat luontevasti vastaukseen kysymyksen muodosta riippumatta 3) opiskelijan metakognitiiviset taidot kehittyvät.)



"Tiekartta"-malli

Junalippujen yhteishinta saadaan kertomalla lipun hinta lippujen määrällä ja jäljelle jäävä rahamäärä saadaan kun vähennetään kassassa olevasta rahamäärästä junalippujen hinta

$$400 \text{ €} - 27 \cdot 12 \text{ €}$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ \cdot 12 \\ \hline 54 \text{ x} \\ + 270 \\ \hline 324 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 400 \\ - 324 \\ \hline 76 \end{array}$$

V: Rahaa jää 76 €

Luonnollinen kieli

Matematiikan kieli

Luonnollinen kieli

”Tiekartta”-malli

- esitellään aluksi koko kuljettava ”reitti” eli kuvaillaan aluksi koko ratkaisuprosessi perusteluineen (ratkaisun ”punainen lanka”) ja sitten formalisoidaan se matematiikan kielelle ja toimitaan matematiikan kielen sääntöjen mukaan. Viimeinen vaihe sama kuin ”Kertomus”-mallissa.



"Päiväkirja"-malli

Carla

1. 1898 a 3kk 12 d - 1878 a 1kk 14 d

$$\begin{array}{r}
 1898 \text{ a } 3 \text{ k } 12 \text{ d} \\
 - 1878 \text{ a } 1 \text{ k } 14 \text{ d} \\
 \hline
 20 \text{ a } 2 \text{ k } 28 \text{ d}
 \end{array}$$

Tulos: 20 a 2 k 28 d 2/2

2. Tulon ajasta 30.17,49 vähennetään
Hailen aika 27.18,20

$$\begin{array}{r}
 30.17,49 \\
 - 27.18,20 \\
 \hline
 02.59,29
 \end{array}$$

T: 2 min 59 s 29sadasosasekuntia 2/2

3. Jos kello on Greenwichin aika on tuntiin
suomen aikaa jäljessä niin kuin suomessa olisi
esim. 14.00 niin olisi Greenwichissä 13.00.
Ja jos New Yorkin aika on Greenwichin
aikaa 6h jäljessä niin kuin Greenwichissä olisi
13.00 olisi New Yorkissa 7.00 HYVÄ!

3.50 + 8.50 h - 7h

$$\begin{array}{r}
 3.50 \\
 + 8.50 \\
 \hline
 12.40
 \end{array}$$

konkreettisesti
perillä suomen
aikaa 12.40 2/2

T: 12.40 newyorkin aikaa

Matematiikan kieli

Luonnollinen kieli

Matematiikan kieli

Luonnollinen kieli

”Päiväkirja”-malli

- ratkaisija kirjoittaa tarvittaessa itselleen jäsentääkseen ajatteluaan kunnes idea on selkiintynyt luonnollisen kielen puolella
- sen jälkeen hän formalisoi ratkaisuprosessin matematiikan kielelle

Missio:

Sanallisiin tehtäviin erillinen *vastaus kokonaisena virkkeenä*, koska

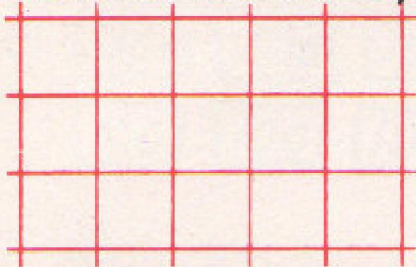
1. vastaukseen saadaan luontevasti mittayksiköt ("Ostokset maksoivat 45 euroa.")
2. oppilas vastaa siihen mitä kysytään (Oppilas joutuu lukemaan tehtävän kysymyksen vielä kerran.)
3. oppilas joutuu pohtimaan antamansa vastauksen mielekkyyttä suhteessa tehtävän antoon (Kehittää oppilaan metakognitiivisia taitoja.)

Kirjallisen vastauksen historiaa

Rikala-Suni-Kaikkonen: Matematiikka 3
,Valistus 1978:

Merkitse allekkain. Laske ja kirjoita tulos.

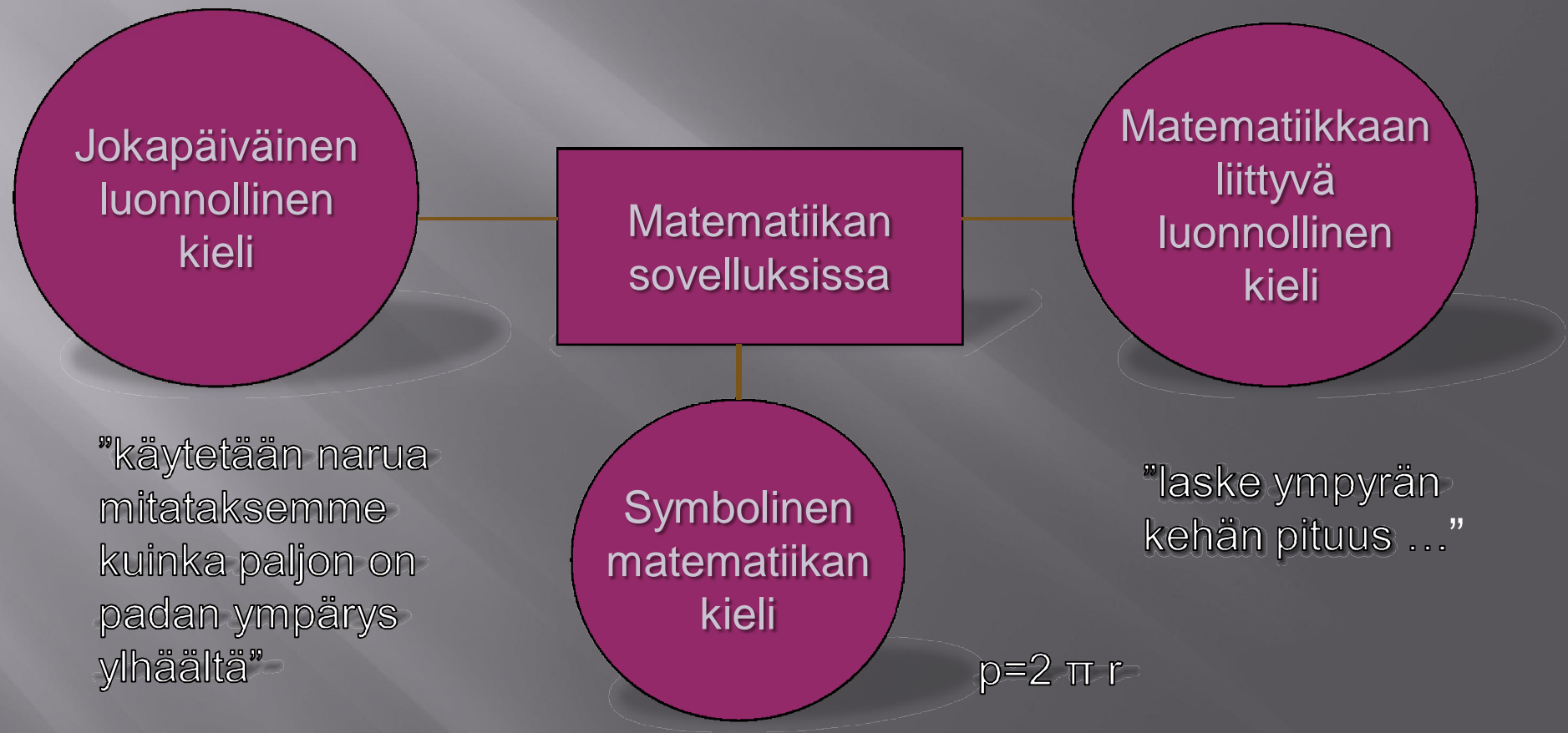
22. Koulussa on 785 oppilasta. Heistä 364 on poikia ja loput tyttöjä.
Kuinka monta tyttöä on koulussa?



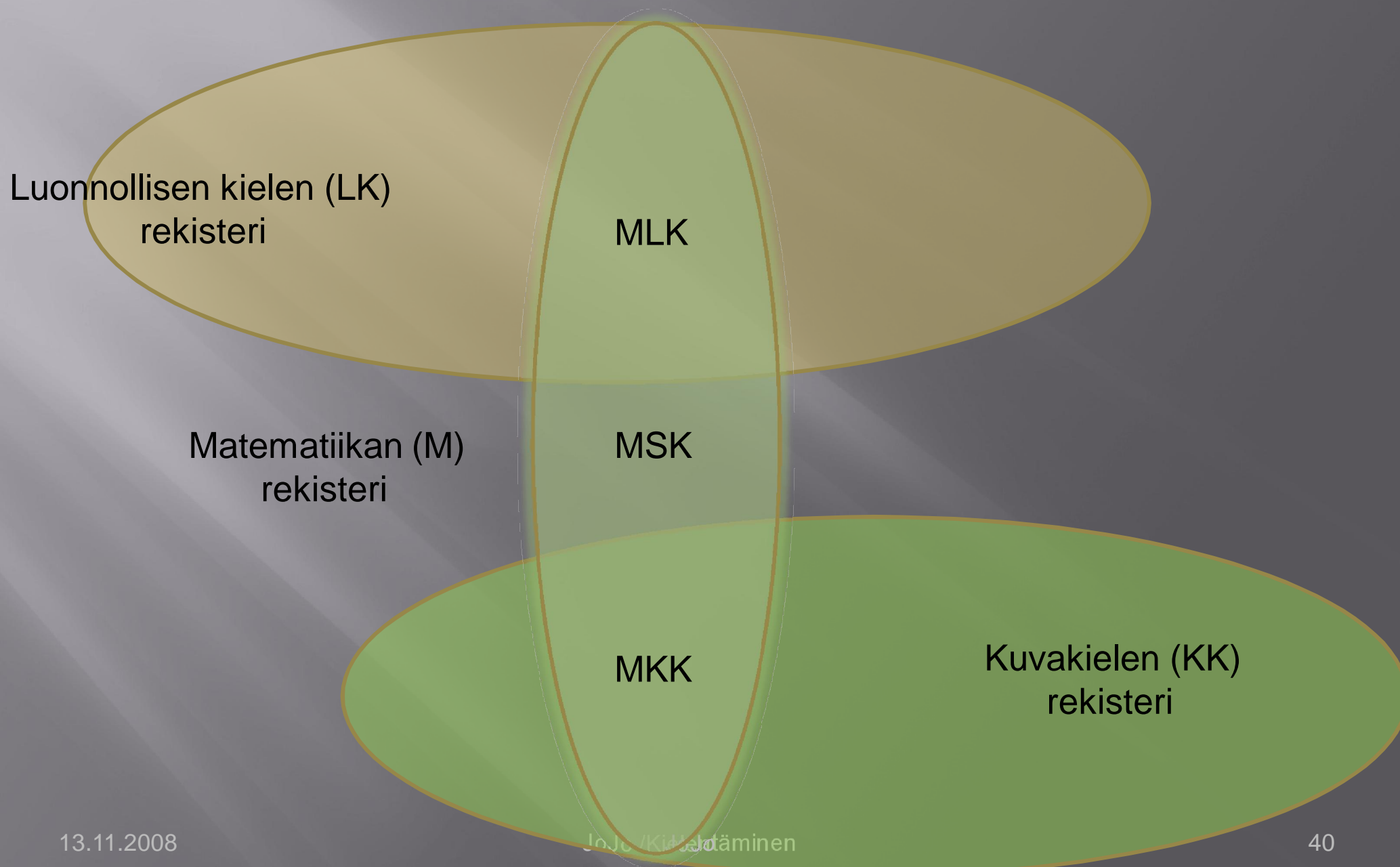
Tulos: Koulussa on

Matemaattisen kielen tyypit

(Ballard&Moore 1987, Meaney 2005)



Kielten rekisterit ja matematiikka



Artikkeli kielentämisestä löytyy osoitteesta

www.Joutsenlahti.net

