

Jorma Joutsenlahti
Matematiikan didaktiikan lehtori
Tampereen yliopisto, Hämeenlinna

Kielentäminen matematiikan opiskelussa

Abstrakti. Käsittelen matematiikan didaktiikan näkökulmasta matemaattisen ajattelun ja kielen yhteyttä. Kieli voidaan ymmärtää puhuttuna tai kirjoitettuna äidinkielenä, piirroksina, ilmeinä, eleinä tai symbolikielinä kuten matematiikan kieli. Oppilaiden mielestä oman matemaattisen ajattelun kuvaaminen toisille on usein vaikeaa. Tähänkin taitoon voi harjaantua. Matematiikan kielentäminen auttaa oppilasta jäsentämään ajatteluaan, ja toisaalta sen avulla oppilaan oma ajattelu tulee näkyväksi muille.

Asiasanat: matemaattinen ajattelu, kieli, kielentäminen

1. Johdanto

Tyypillinen koululaisen matematiikan vihko sisältää pääasiassa laskulausekkeita, laskutoimituksia ja tuloksia. Tehtävien ratkaisujen esittämistapa ei ole juurikaan vaihdellut vuosikymmenten saatossa, vaan on jatkunut samantyyppisenä peruskoulusta aina lukioon asti. Tehtävien matemaattiset ratkaisut, voivat olla monivaiheisia soveltavia tehtäviä, mutta esitystapa on korostetun niukka, täsmällinen ja persoonaton. Ratkaisuun johtanut oppilaan ajattelu on vain arvailtavissa vihkoon kirjatuihin matemaattisiin lausekkeisiin. Niiden ymmärtäminen esimerkiksi tauluesityksessä saattaa pelkistetyssä muodossa ilman verbaalista selitystä jäädä hämäräksi tehtävää osaamattomille oppilastovereille. Tiivis esitystapa kulminoituu matematiikan ylioppilaskirjoituksissa, joiden tuloksia tarkastellessaan ylioppilastutkintolautakunnan puheenjohtaja Lahtinen on toistuvasti esittänyt huolensa opiskelijoiden puutteellisesta argumentointitaidoista (esim. Dimensio 6/99). Eri oppiaineista ilmeisesti matematiikan vihkoissa on vähiten oppilaan omaa

äidinkieltä. Se on kuitenkin juuri se kieli, jonka avulla oppilas ajattelee ja ilmaisee itseään eniten myös koulumatematiikassa.

Uusissa perusopetuksen opetussuunnitelmien perusteissa (Opetushallitus 2003) on kirjattuna matematiikan tavoitteissa kaikkiin nivelkohtiin oppilaan taito esittää ratkaisujaan ja päätelmiään niin kirjallisesti kuin suullisestikin. Esimerkiksi kuvauksessa oppilaan hyvästä osaamisesta 2. luokan päättyessä todetaan seuraavaa (Opetushallitus 2003, 103):

”Oppilas pystyy tekemään perusteltuja päätelmiä ja selittämään toimintaansa ja osaa esittää ratkaisujaan konkreettisin mallein ja välinein, kuvin, suullisesti ja kirjallisesti.”

Sama taitotavoite on myös hyvän osaamisen kuvauksessa 5. luokan päättyessä (Opetushallitus 2003, 105):

”... hän pystyy kommunikoimaan havainnoistaan ja ajatuksistaan monipuolisesti, toimimalla, puhumalla, kirjoittamalla ja symbolien avulla.”

Oppilaan monipuoliseen ilmaisuun matematiikan tunneilla on siis kiinnitetty huomiota myös valtakunnallisesti. Oppimisen teoreettisena viitekehyksenä voidaan tällä hetkellä pitää **sosiaalista konstruktivismia**, jossa korostetaan tiedon sosiaalista ja kulttuurista alkuperää. Erityisesti kielen asema on keskeinen. Ernest (1996) näkee sosiaalisen konstruktivismin lähtökohdiksi sekä Piaget'n yksilökeskeistä että Vygotskin sosiaalista kontekstia ja kielen merkitystä korostavat teorit, joissa oppija nähdään oman tietonsa rakentajana

2 Matemaattinen ajattelu

Matemaattinen ajattelu (*mathematical thinking*) on käsitteenä esiintynyt pitkään sekä ainedidaktisessa kirjallisuudessa (ks. Joutsenlahti 1997) että myös kouluhallinnon asiakirjoissa. Eri kirjoittajat määrittelevät sen kuitenkin eri tavoilla. Sternberg (1996)

Taulukko 1. Erilaiset lähestymistavat matemaattisen ajattelun tutkimukseen ja Sternbergin (1996) luokitusta mukaillen.

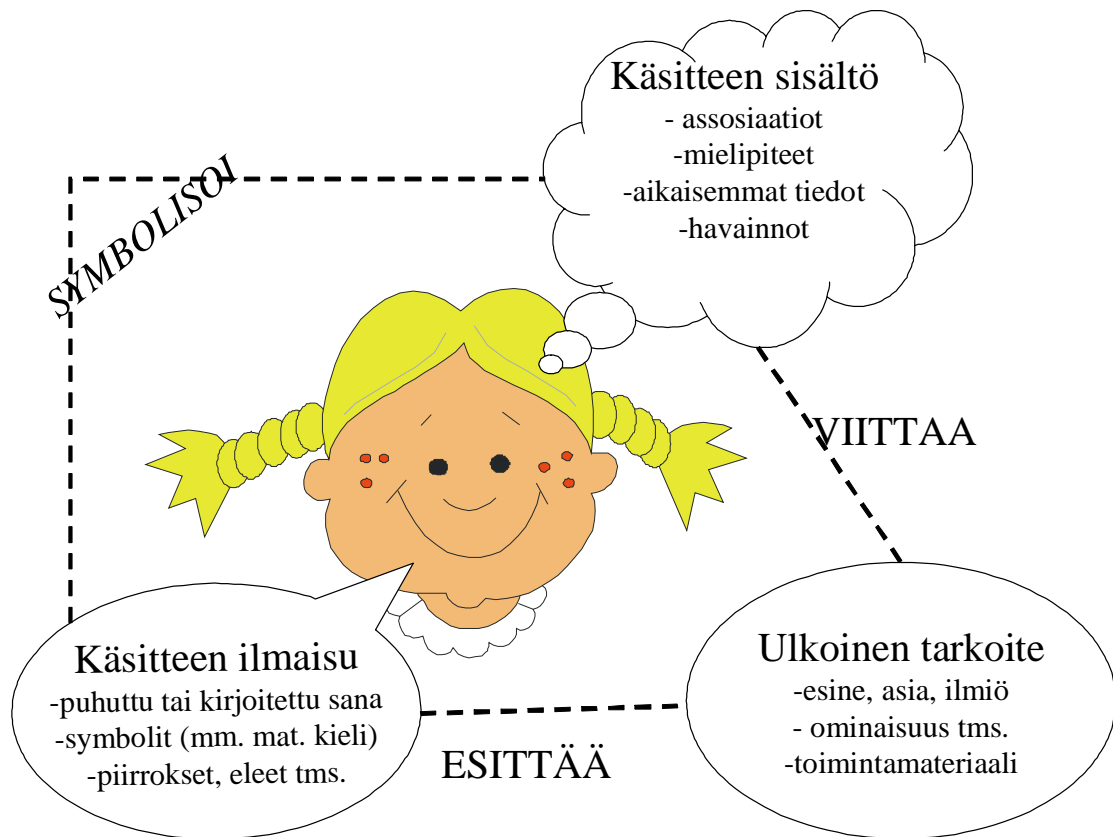
Lähestymistapa matemaattiseen ajatteluun	Keskeisiä tutkimuskohteita
Psykometrinen	Kykyfaktorit
Informaation prosessointia tutkiva	Matemaattisessa ongelmanratkaisussa tarvittavat mentaaliset prosessit, matemaattinen ymmärrys, tiedon käsite
Antropologinen	Kansallinen kulttuuri, arkipäivän matematiikka
Pedagoginen	Matematiikan oppimisen ohjaaminen, oppijoiden asenteet, uskomukset ja sosiaaliset suhteet
Tiedematematiikan	Ajattelun esteettisyys, oppijan itseluottamus, analoginen päättely, tiedon struktuurien ymmärtäminen, ongelmien tulkinta, visuaalinen päättely, käänteinen ajattelu ja ajattelun joustavuus

totesi, että matemaattisen ajattelun tutkijoiden erilaiset tutkimuslähtökohdat johtavat rakenteellisesti erilaisiin määritelmiin, joissa on käytetty toisistaan poikkeavia käsitteitä. Taulukossa 1 on koottuna Sternbergin erottamat matemaattisen ajattelun tutkimuksen lähestymistavat ja keskeiset kohteet. Sternberg (1996) antaa esimerkkejä erilaisista lähestymistavoista matemaattiseen ajatteluun. Psykometriikan tutkija kysyy, mitkä kykyfaktorit ovat keskeisiä matemaattisessa ajattelussa. Kognitiivisen psykologian tutkija puolestaan kysyy, mitkä mentaaliset prosessit ja representaatiot ovat relevantteja matemaattisessa ajattelussa. Kulttuuriorientoitunut ajattelun tutkija määrittää, mitkä ajattelun elementit ovat vuorovaikutuksessa kulttuurin kanssa. Koulutuksen tutkija miettii, mitkä oppilaan ohjaamisen periaatteet ovat relevantteja matemaattisen ajattelun kehittymisessä. Matemaatikko saattaa kysyä, mitkä ajattelun näkökulmat ja oppijan affektit ovat tärkeitä ajattelulle. Erilaiset lähestymistavat painottavat kukin eri tavalla matemaattiseen ajatteluun vaikuttavia tekijöitä, joita voidaan kuvata **prototyypimallien** (*prototypical model*) avulla. Prototyypillä tarkoitetaan tyypillistä joukkonsa edustajaa, joka voidaan muodostaa piirteiden keskiarvo- tai frekvenssimallina (Silfverberg 1999, 69).

Esimerkkinä tiedon prosessointia kuvaavasta lähestymistavasta olkoon Burtonin teoria (1984, 38), jossa matemaattisen ajattelun keskeisinä prosesseina pidetään seuraavia: täsmentäminen, otaksumien arvailu, yleistäminen ja vakuuttuminen (lisää esim. Yrjönsuuri 1990, Pehkonen 2000). Tiedon luonne on noussut tärkeäksi tutkimuskohteeksi kuvattaessa ajattelua. Erityisesti tiedon jako proseduraaliseen ja konseptuaaliseen tietoon (tarkemmin artikkelissa Hiebert ja Lefevre, 1986) on ollut esillä ajattelun tutkimuksessa (esim. Haapasalo 1998, Joutsenlahti 2003). Ilmeisesti tutkijoiden ei ole mitään syytä pyrkiä yhteen kaiken kattavaan matemaattisen ajattelun määritelmään. Tutkija voi painottaa kyseisen käsitteen määrittelyssä valitsemansa näkökulman esille tuomia käsitteen keskeisiä piirteitä.

3. Kieli ja ajattelu

Kieli määritellään tavallisimmin symbolien järjestelmäksi, jossa symboli eli kielellinen merkki koostuu sisällöstä ja muodosta. Kielellisellä merkillä on vastaava suhde edustamaansa todellisuuteen kuin kartalla maastoonsa. (Koppinen ym. 1989). Kieli sisältää puhutun ja kirjoitetun kielen lisäksi kuvat, ilmeet, eleet sekä mm. matematiikan symbolikielen. Kieli on mukana kognitiivisissa kehitysprosesseissa. Vygotski (1982) toteaa, että kieltä ja ajattelua ei voi erottaa toisistaan kouluikäisillä. Kielen tehtävät voidaan luokitella esimerkiksi seuraavasti (Koppinen ym. 1989, Orpana 1992) : kieli on ajattelun, tiedonhankinnan ja – välittämisen, vaikuttamisen, sosiaalisten suhteiden luomisen ja ylläpitämisen, tunteiden ilmaisemisen, kielellisen luomisen sekä oman ja toisten käyttäytymisen säätelemisen väline. Matematiikan opiskelussa nousevat esille erityisesti neljä ensimmäistä tehtävää. Kielen avulla oppilas jäsentää ajatteluaan ja välittää sitä muille. Hän perustelee ja reflektoi käsityksiään kielen avulla ja voi siten saada itsensä ja muut vakuuttuneiksi ajattelunsa oikeellisuudesta. Kielen kautta tapahtuvat myös tunteiden, asenteiden ja uskomusten ilmaiseminen, jotka kaikki vaikuttavat myös keskeisesti matematiikan opiskeluun.



(c) JoJo

Kuva 1. Oppilaan ajattelun ja kielen yhteys yksilön oppimisprosessissa.

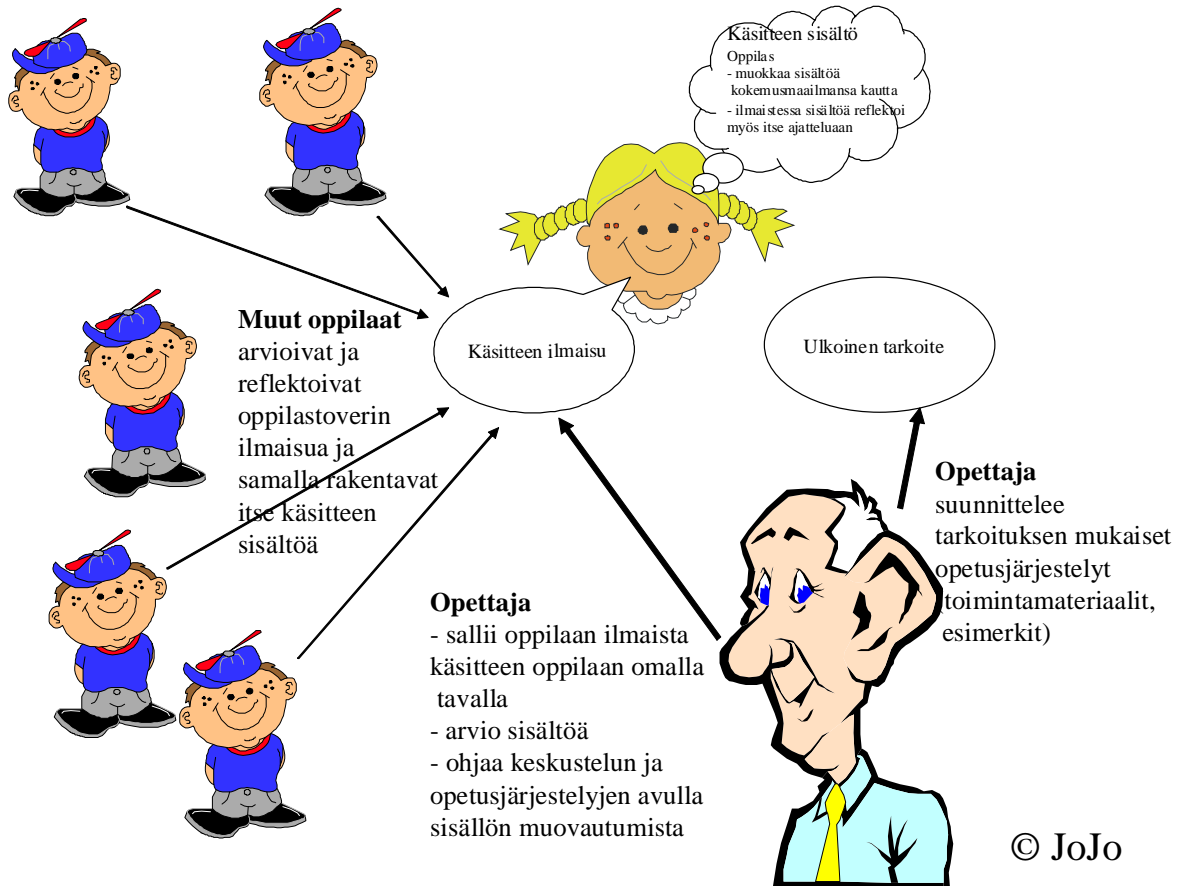
Høines (2000) on selvittänyt matemaattisten käsitteiden syntyä koulun alaluokkien oppilailla teoksessaan *Matematik som språk*, jossa hän nostaa kielen merkityksen keskeiseksi matemaattisten käsitteiden oppimisessa. Tässä teoksessa on luotu käytännön läheinen malli oppilaan oppimisprosessista. Malli jää hieman epämääräiseksi käsitteen kehittymisen kuvailun osalta verrattuna esimerkiksi Vygotskin teoriaan. Høines ei huomioi oppijan kehitystason vaikutusta käsitteiden oppimiseen (yhdistelmäkäsitteet, aidot käsitteet), sillä hän on tutkinutkin vain tietyn ikäisiä lapsia. Olen muokannut kyseistä mallia (kuva 1) sen puutteista huolimatta, sillä mielestäni se on käytännön läheinen ja palvelee tässä artikkelissa esittämiäni näkökohtia kohtuullisen hyvin.

Uusien käsitteiden opiskelun lähtökohtana tulee olla oppilaiden olemassa olevat tiedot ja taidot, jotka he kokevat merkityksellisiksi. Käsite muodostuu käsitteen sisällöstä ja ilmaisusta. Nämä ovat kuin paperin kaksi puolta: eroteltavissa toisistaan, mutta kuitenkin erottamattomat. Toista ei voi olla olemassa ilman toista. Käsitteen sisältö viittaa aina johonkin ulkoiseen tarkoitteeseen, joka voi olla esine, asia, ominaisuus tai mikä hyvänsä havaittava kohde. Käsite on tämän tarkoitteen representaatio. Ilmaisua voi olla puhuttua tai kirjoitettua kieltä, symboleja, piirroksia yms.

Matemaattisten käsitteiden opetuksessa toimintamateriaali on todettu erinomaiseksi opetusvälineeksi (esim. Lindgren 1990). Toimintamateriaalin ja tarkoituksenmukaisten esimerkkien avulla oppilas luo mentaalimallia käsitteestä. Tähän vaikuttavat opiskeltavaan asiaan assosioituvat oppilaan aikaisemmat tiedot, kokemukset ja uskomukset. Kun oppilas saa ilmaista opiskeltavan käsitteen sisältöä itse valitsemallaan tavalla (puhumalla omalla terminologiallaan, piirtämällä jne.), niin opettaja ja muut oppilaat saavat kuvan tämän oppilaan käsitteen ymmärtämisestä. Matemaattisen käsitteen **kielentäminen** on myös osa oppilaan käsitteen konstruointiprosessia. Oppilaan ilmaistessa muille käsitteen sisältöä hän joutuu pohtimaan käsitteen keskeisiä piirteitä ja refleктоimaan sekä jäsentämään matemaattista ajatteluaan. Muut oppilaat voivat samalla verrata oppimansa käsitteen sisältöä toisen oppilaan ilmaisuun ja muovata keskustelun avulla sekä omaansa että toisten oppilaiden käsitteen sisältöä. Oppilaan ilmaisussa tulevat esille myös hänen asiaan liittyvät uskomuksensa.

4. Opettajan ja luokkayhteisön rooli matematiikan kielentämisessä

Opettajan tärkeä tehtävä on suunnitella opetusjärjestelyt, joissa toimintamateriaalit, esimerkit, mallit yms. on etukäteen tarkoin harkittu. Opettaja saa viitteitä oppilaan



Kuva 2. Oppilaan matemaattisen ajattelun kielentämisen merkitys opettajan ja muiden oppilaiden näkökulmasta.

ajatteluprosesseista seuraamalla oppilaan toimintaa ja arvioimalla oppilaan käsitteen kielentämisessä syntyvää kuvaa (kuva 2). Jos opettaja kannustaa oppilasta matematiikan tunneilla myös epäformaalin kielen käyttöön eli kertomaan ajatuksistaan omin sanoin, niin tällöin opettaja pääsee kaikkein lähimmäksi oppilaan ajattelua. Tämän pohjalta opettaja voi tehdä uusia opetusjärjestelyjä ja siten antaa oppilaalle mahdollisuuden muovata edelleen mentaalimalliaan käsitteestä.

Nykyään oppilasryhmät ovat suuria, joten vain pieni osa oppilaista voi tunnin aikana kielentää omaa matemaattista ajatteluaan opettajalle ja muulle luokalle. Tämän vuoksi oppilaita tulisi ohjata selostamaan matemaattisia ratkaisujaan vaihe vaiheelta myös vihkoonsa. Vihkossa oppilas voi jäsentää omia soveltavien tehtävien

ratkaisujaan pienillä väliotsikoilla – Autoja on yhteensä ... kappaletta, Rahaa kului ostoksiin yhteensä ... euroa, Kilohinta on ... euroa – ja vähitellen opetella kirjoittamaan esiin ratkaisunsa johtoajatuksen. Tällainen ajattelun kielentäminen avaa opettajalle mahdollisuuden arvioida jokaisen oppilaan ajatteluprosessia ja käytettyjen käsitteiden sisällön oikeellisuutta. Pelkkä matemaattisten lausekkeiden jono vihkossa tai taululla ei vielä välttämättä kerro lukijalle perusteluja, miksi juuri näin on tehty ja mikä on ratkaisuperiaate. Muille esitetyissä ratkaisuissa, joko taululla tai piirtoheittimellä, väliotsikointi jäsentää esityksen helpommin seurattavaksi, kun oppilas itse vielä selittää ratkaisunsa periaatteen ja perustelut. Samalla oppilas myös jäsentää omaa ajatteluaan, ja opittu tieto voi muuttua konseptuaaliseksi, kun se verkottuu muihin tietoyksiköihin kielen kautta.

5. Ajatus selkeäksi, ajattelu näkyväksi

Nykyisissä työyhteisöissä vallitsee usein tiimijattelu. Tämän mukaan jokainen tiimin jäsen tekee omaa osaansa tiimin työurakasta ja kykenee esittämään muille tiimin jäsenille omaa työsuuttaan. Työskentely on usein yhteistoiminnallista ja oman ajattelun kielentäminen muille on keskeinen osa tiimin työskentelyä. Tämä koskee myös matemaattisten ongelmien parissa työskenteleviä. Koulu ei ole kiinnittänyt kovin paljon huomiota matematiikan tunneilla tämän valmiuden hankkimiseen. Globaalissa maailmantaloudessa matematiikan taitajan pitää osata kielentää ajatteluaan asiasta kiinnostuneille jopa useammalla kuin yhdellä luonnollisella kielellä. Harjoittelun pitää kuitenkin alkaa omalla äidinkielellä jo alaluokilta. Meilläkin suosiota saavuttanut niin sanottu unkarilainen matematiikka on huomionut pienten oppilaiden ilmaisujen merkityksen matematiikan oppimisessa (kts. Näätänen 2001).

Matematiikan kielentämiseen liittyvä tutkimus on Suomessa alkuvaiheessa. Keskeisiä tutkimuskysymyksiä ovat mm. millä kehityskausilla oppilaat hallitsevat erilaisia

tapoja kielentää ajatteluaan ja minkälaiset tavat ovat luontevimpia kullakin kehityskaudella. Forsblom (2003) on selvittänyt, että jo peruskoulun 2. luokalta lähtien ainakin osa oppilaista kykenee kielentämään ajatteluaan kirjallisesti. Hämeenlinnan normaalikoulussa tehdyissä kokeiluissa 6. luokkalaiset pystyivät esittämään monipuolisesti ja jäsentyneesti omia ratkaisujaan kirjallisena kuuden viikon kielentämisprojektissa keväällä 2003. Projektien tuloksista raportoidaan myöhemmin. Vuonna 2001 kokeilin matematiikan kielentämistä didaktisen matematiikan aineopintoihin (15 ov) kuuluvalla kurssilla ”Matematiikkaa tietokoneympäristössä”. Tällä kurssilla opiskelijat saivat laatia annettuihin tehtäviin ratkaisun kertomuksen muodossa siten, että oma ratkaisuprosessi kielennettiin tarvittavien laskutoimitusten väliin. Laskutoimitukset, joihin kuului myös symbolinen laskenta, hoiti matemaattinen laskentaohjelma. Opiskelijalle jäi vain ajattelunsa esittäminen. Samalla hän jäseni ajatteluaan, ja oli nähtävissä, että ratkaisun myötä tapahtui myös ymmärryksen kasvua tehtävän vaatimista matematiikan käsitteistä.

Yhteenvedona matematiikan kielentämisestä voidaan sanoa, että yksittäisen oppilaan matemaattisen ajattelun kielentämisen kautta oppilas itse jäsentää ja syventää omaa ajatteluaan sekä luokan muut oppilaat voivat sen pohjalta reflektoida ja kehittää ajatteluaan. Opettajalle oppilaan ajattelu tulee näkyväksi ja se on hyvä pohja pedagogiselle suunnittelulle. Oman ajattelunsa kirjoittaminen näkyväksi laskutoimitusten lisäksi matematiikan vihkoon on työtapa, joka varhain opittuna tulee helpottamaan opiskelua myöhemmin ja lisäämään matematiikan käsitteiden ymmärtämistä. Tie matematiikan käsitteistöön ja symbolikieleen käy koulussa äidinkielen kautta, joten äidinkieli on avainasemassa myös oppilaan matemaattisen ajattelun tulkkina opettajalle ja muille oppilaille.

Lähteet:

Ernest, P. 1996. Social constructivism and the psychology of mathematics education. Teoksessa Ernest, P. (toim.): Constructing mathematical knowledge: epistemology and mathematical education. London: The Falmer Press. 62-72.

Forsblom K. 2003. Kokemuksia matematiikan kielentämisestä. Teoksessa Aalto, A.-L. & Tuomi, T. (toim.) Projekteja ja prosesseja - opetuksen käytäntöjä matematiikassa ja viestinnässä. Tampereen yliopisto. Hämeenlinnan normaalikoulun julkaisu nro 8. 125-133.

Haapasalo, L. 1998. Oppiminen, tieto, ongelmanratkaisu. Joensuu: Medusa-Software.

Hiebert, J. & Lefevre, P. 1986. Conceptual and procedural knowledge in mathematics: an introductory analysis. Teoksessa Hiebert, J. (toim.): Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics. Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum Associates. 1-27.

Høines, M. 2000. Matematik som språk. Verksamhetsteoretiska perspektiv. Kristianstad: Liber AB.

Joutsenlahti, J. 1997. Matemaattisen ajattelun kehittyminen lukiossa. Teoksessa: Räsänen, P., Kupari, P., Ahonen, T. & Malinen, P. (toim.) Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki instituutti & Koulutuksen tutkimuslaitos, 336-351.

Joutsenlahti, J. 2003. Matemaattinen ajattelu ja kieli, eräs mielenkiintoinen ulottuvuus uudessa opetussuunnitelmassa. Teoksessa Aalto, A.-L. & Tuomi, T. (toim.) Projekteja ja prosesseja - opetuksen käytäntöjä matematiikassa ja viestinnässä. Tampereen yliopisto. Hämeenlinnan normaalikoulun julkaisu nro 8. 3-11.

Koppinen M.-L., Lyytinen P., Rasku-Puttonen H. 1989. Lapsen kieli ja vuorovaikutustaidot. Helsinki: Kirjayhtymä.

Lahtinen, A. 1999. Matematiikan ylioppilaskirjoitus keväällä 1999. Dimensio 63 (6), 4-22.

Lindgren, S. 1990. Toimintamateriaalin käyttö matematiikan opetuksessa. Acta Universitatis Tamperensis. Sarja A. Osa 307.

Näätänen, M. 2001. Unkarilaisesta matematiikan opetuksesta Suomessa ja Englannissa.

<<http://solmu.math.helsinki.fi/2001/2/naatanen1.html>> (31.3.2003)

Opetushallitus 2003. Perusopetuksen opetuskokeilussa lukuvuonna 2003-2004 noudatettavat opetussuunnitelman perusteet vuosiluokille 3-9 ja perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet vuosiluokille 1-2. Helsinki: Edita Prima oy.

Pehkonen, E. 2000. Ymmärtäminen matematiikan opetuksessa. Kasvatus (4), 375-381.

Silfverberg, H. 1999. Peruskoulun yläasteen oppilaan geometrinen käsitetieto. Vammala: Vammalan kirjapaino oy .

Sternberg, R. 1996. What is mathematical thinking? Teoksessa Sternberg, R. & Ben-Zeev, T. (toim.) The nature of mathematical thinking. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. 303-318.

Vygotski, L. 1982. Ajattelu ja kieli. Vuonna 1931 ilmestyneestä venäjänkielisestä alkuteoksesta suomentaneet K. Helkama ja A. Koski-Jännes. Prisma-tietokirjasto. Espoo: Weilin&Göös.

Yrjönsuuri, R. 1990. Lukiolaisten matemaattisen ajattelun oppiminen. Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 88.